# Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

# Musterlösungen zum Hausübungsblatt 9

## Aufgabe 1 (5+3=8 Punkte)

a) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|b)$ in Gauß-Jordan-Form:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 10 & -5 & 2 & -4 & 10 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 & 2 & -8 & 11 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \to \\ 5I - II \\ 2I + III \\ I + IV \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \to \\ 2II - 3III \\ II + IV \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} I - 1/2III \\ II - 1/2III \\ -1/2III \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} I - 1/3II \\ 1/3II \\ \to \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 1/2I \\ \to \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Nun suchen wir die Lösungsmenge $U$ des homogenen Gleichungssystems $A'x = 0$. Dazu setzen wir $x_2 = \lambda, x_5 = \mu$. Es ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2\lambda \\ x_3 &= -\mu \\ x_4 &= 2\mu \end{aligned}$$

bzw.

$$x = \begin{pmatrix} 1/2\lambda \\ \lambda \\ -\mu \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also gilt

$$U = span \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun suchen wir eine spezielle Lösung $w$ des inhomogenen Gleichungssystems $A'x = b'$. Wir setzen $w_2 = 0, w_5 = 0$ und erhalten damit direkt aus der Gauß-Jordan-Form

$$w_1 = 1/2, w_3 = -3, w_4 = 0,$$

also

$$w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge $Lös(A, b) = Lös(A', b')$ ist dann $w + U$, also

$$Lös(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in R \right\}.$$

b) Wir bringen die Matrix wieder in Gauß-Jordan-Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & -4 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \to \\ 2I - II \\ 2I + III \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 17 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \to \\ II + 2III \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass sich in der Matrix $(A', b')$ in der Spalte $b'$ ein Leitkoeffizient (die 48) befindet. Das Gleichungssystem hat also keine Lösung.

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die Berechnungsvorschrift für $x^{(k+1)}$ lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} + b_1) = 2x_2^{(k)} + 2 \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} + b_2) = -\tfrac{4}{3}x_1^{(k)} - \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit dem Startwert $x^{(0)} = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (2, -1/3) \\ x^{(2)} &= (4/3, -3) \\ x^{(3)} &= (-4, -2.\bar{1}) \\ x^{(4)} &= (-2, \bar{2}, 5) \end{aligned}$$

## Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

a) Es gilt $(5, -2, 8) + (-7, 11, 3) + (2, -9, -11) = 0$, die Zeilen der Matrix sind also linear abhängig. Daher ist ihre Determinate 0.

b) Wir entwickeln nach der dritten Spalte, da diese viele Nullen enthält:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} &= -4\left(2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) \\ &= -4(2(9-2) - (3+2) - 2(-2-6)) = -100 \end{aligned}$$

## Aufgabe 4 (4+2+2=8 Punkte)

1. Betrachten wir den Vektor $u$ als Grundfläche des Parallelogramms, so ist seine Höhe gerade $c$. Der Flächeninhalt ist daher $ac$.

2. Es ist

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 \cdot b = ac.$$

3. Hier ist der Flächeninhalt $A$ des Parallelogramms gerade der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die aus den Spaltenvektoren u und v besteht, also

$$A = \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right| = |-8 + 15| = 7$$