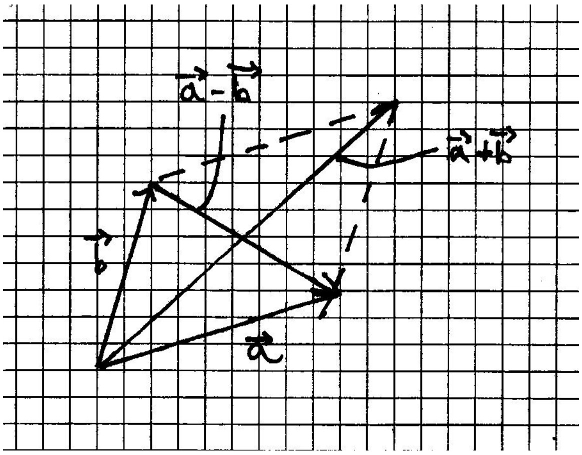
Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Präsenzübungsblatt 8

Aufgabe 1



Wird das Parallelogramm von den Vektoren a und b aufgespannt, so sind seine Diagonalen $a+b$ und $a-b$. Es gelten dann folgende Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& a+b \text{ und } a-b \text{ sind gleich lang} \\
\Leftrightarrow\quad & |a+b| = |a-b| \\
\Leftrightarrow\quad & (a+b)^2 = (a-b)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & ab = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \text{Die beiden Seiten sind orthogonal} \\
\Leftrightarrow\quad & \text{Das Parallelogramm ist ein Rechteck.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a) 1. Es ist offensichtlich $\|x\|_0 \geq 0$ und ebenso offensichtlich $\|x\|_0 = 0 \Rightarrow x = 0$.

   2. Die Forderung $\|\alpha x\|_0 = |\alpha|\|x\|_0$ ist nicht erfüllt, da z.B. $\|2(1,0)\|_0 = 1 \neq 2 = 2\|(1,0)\|_0$.

   3. Die Dreiecksungleichung ist erfüllt. Wir führen eine Fallunterscheidung durch:
      Fall 1: $x = 0 \wedge y = 0$. Dann gilt $\|x+y\|_0 = 0 \leq 0 = \|x\|_0 + \|y\|_0$.
      Fall 2: $x \neq 0 \vee y \neq 0$. Dann gilt $\|x\|_0 + \|y\|_0 \geq 1 \geq \|x+y\|_0$.

   Wegen 2. ist $\|\cdot\|_0$ keine Norm.

b) 1. Es ist offensichtlich $d_P(x,y) \geq 0$.

   2. Zu zeigen ist nun $d_P(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Wir zeigen die Kontraposition $x \neq y \Rightarrow d_P(x,y) \neq 0$. Sei also $x \neq y$. Dann muss gelten $x \neq P$ oder $y \neq P$. Es sei O.B.d.A. $x \neq P$ und damit $d(x,P) > 0$. Also ist $d_P(x,y) = d(x,P) + d(y,P) > 0$.

   3. Für $x = y$ gilt trivialerweise $d_P(x,y) = d_P(y,x)$, für $x \neq y$ gilt $d_P(x,y) = d(x,P) + d(y,P) = d(y,P) + d(x,P) = d_P(y,x)$.

   4. Für die Dreiecksungleichung führen wir eine Fallunterscheidung durch:
      Fall 1: $x = y$. Dann gilt $d_P(x,y) = 0 \leq d_P(x,w) + d_P(y,w)$ wegen 1.
      Fall 2: $x \neq y, x = w$. Dann gilt $d_P(x,y) = 0 + d_P(y,x) = d_P(x,w) + d_P(y,w)$.
      Fall 3: $x \neq y, y = w$. Dann gilt $d_P(x,y) = d_P(x,y) + 0 = d_P(x,w) + d_P(y,w)$.
      Fall 4: $x \neq y, x \neq w, y \neq w$. Dann gilt $d_P(x,y) = d(x,P) + d(y,P) \leq d(x,P) + d(w,P) + d(y,P) + d(w,P) = d_P(x,w) + d_P(y,w)$.

   d_P ist also eine Metrik.