Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 8

Aufgabe 1 (5+3+3=11 Punkte)

a) Wir stellen die Vektoren von E als Linearkombination der Vektoren aus B dar, d.h. wir suchen Koeffezienten a, b, so dass

$$(1, 0) = a(3, -2) + b(1, -1).$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a + b &= 1 \\ -2a - b &= 0, \end{aligned}$$

dessen Lösung $a = 1, b = -2$ ist. Wir haben also

$$(1, 0) = 1(3, -2) - 2(1, -1).$$

Analog bekommt man die Darstellung des zweiten Basisvektors

$$(0, 1) = 1(3, -2) - 3(1, -1).$$

Die Basiswechselmatrix S_E^B ergibt sich aus den Koeffizienten dieser Darstellungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt auch

$$(2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1) \text{ und } (-5, 3) = -5(1, 0) + 3(0, 1),$$

und damit

$$S_C^E = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} A_E^E &= S_C^E A_B^C S_E^B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -12 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 115 \\ -25 & -36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) und

$$\begin{aligned} A_C^B &= S_E^B A_E^E S_C^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -27 \\ 1 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & -21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6+4=10 Punkte)

a) Wir bringen die Matrix auf Zeilen-Stufen-Form, um den Rang abzulesen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ I-2II \\ I+2III \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ 3II-2III \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix beträgt also 3.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ 3I+II \\ 2I-III \\ I+IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ 5II+2III \\ 3II-2IV \end{array} &\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ 2III+IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Rang der Matrix beträgt ebenfalls 3. Die dritte Matrix kann nun ebenfalls nach dem Gauß-Algorithmus auf Zeilen-Stufen-Form gebracht werden, oder man geht alternativ so vor:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} I - VI \\ II - VI \\ II - VI \\ IV - VI \\ \rightarrow \\ \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ V - I - II - III - IV \\ VI - I - 1/2 II - 1/3 III - 1/4 IV \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Diese Matrix hat also Rang 4.

b) Wir formen die Matrix zur Einheitsmatrix um und wenden dieselben Umformungen dann auf die Einheitsmatrix an:

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -60 \\ -2 & 7 & 140 \\ 1 & -5 & -95 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -60 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 35 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ 2I + II \\ I - II \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -60 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ 2II - III \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} I + 12III \\ II - 4III \\ 1/5 III \end{array} & \begin{pmatrix} 37 & 24 & 12 \\ -10 & -7 & -4 \\ 3/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} I + 3II \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -10 & -7 & -4 \\ 3/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Es gilt also

$$
\begin{pmatrix} 1 & -3 & -60 \\ -2 & 7 & 140 \\ 1 & -5 & -95 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -10 & -7 & -4 \\ 3/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

$$
\begin{array}{cccc}
 & \text{Umformung} & & \text{zugehörige Matrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & -6 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ 3I + 2II \\ 2I - III \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & -24 & 15 \\ 0 & -9 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ 3II - 8III \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & -24 & 15 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} 1/2I \\ -1/24II \\ 1/5III \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/24 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$