Mathematik für Informatiker II
Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 3. Juni 2011, 10:10 Uhr

Aufgabe 1 (4+2=6 Punkte)

Seien K ein Körper, $A \in K^{l \times m}$, $B \in K^{m \times n}$, $C \in GL(n, K)$. Zeigen Sie:

a) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,

b) $(C^T)^{-1} = (C^{-1})^T$.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^3 - 3A^2 + 4I_3$, und verwenden Sie das Ergebnis zur Berechnung von A^{-1}.

b) Eine Matrix $A \in GL(n, K)$ heisst *nilpotent*, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^{n_0} = 0$. Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so gilt

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{n_0 - 1} A^k.$$

Hierbei ist $A^0 := I_n$.

Aufgabe 3 (3+4=7 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und f die durch A beschriebene lineare Abbildung.

a) Bestimmen Sie $rang(A)$ und $\dim Ker(f)$.

b) Geben Sie jeweils eine Basis von $Im(f)$ und $Ker(f)$ an.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

Es bezeichne $C^1(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die durch

$$\begin{aligned}
&v_1(t) = \sin^2(2t) \\
&v_2(t) = \cos^2(2t) \\
&v_3(t) = \sin(2t)\cos(2t) \quad (t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

gegebenen Funktionen $v_1, v_2, v_3 \in C^1(\mathbb{R})$ sind linear unabhängig.

b) Sei $V := \mathit{span}(v_1, v_2, v_3)$. Zeigen Sie, dass die Differentiation $(D_v)(t) := v'(t)$ eine lineare Abbildung $D : V \to V$ ist, und geben Sie eine passende Matrixdarstellung von D bzgl. der Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ an.