Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 7

Aufgabe 1 (4+2=6 Punkte)

a) Für eine Matrix M sei M_{ij} der Eintrag von M in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. In dieser Notation ist

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$$

und damit

$$(A \cdot B)^T_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} B_{ki}.$$

Ausserdem ist

$$(B^T \cdot A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B^T_{ik} A^T_{kj} = \sum_{k=1}^{m} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} B_{ki} = (A \cdot B)^T_{ij}.$$

Die beiden Matrizen sind also gleich.

b) Es ist

$$C^T \cdot (C^{-1})^T \overset{a)}{=} (C^{-1} \cdot C)^T = I^T = I.$$

Daraus folgt, dass $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

a) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A^3 - 3A^2 + 4I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir haben also die Gleichung

$$A^3 - 3A^2 = -4I_3 \Leftrightarrow A \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (A^2 - 3A) = I_3.$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{4}(A^2 - 3A) = -\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} &(I_n - A) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} A^k\right) = I_n \cdot \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} A^k\right) - A \cdot \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} A^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n_0-1} I_n A^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} A \cdot A^k = \sum_{k=0}^{n_0-1} A^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{n_0-1} A^k - \sum_{k=1}^{n_0} A^k \\ &= A^0 + \left(\sum_{k=1}^{n_0-1} A^k - \sum_{k=1}^{n_0-1} A^k\right) + A^{n_0} = A^0 - A^{n_0} = I_n - 0 = I_n. \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage gezeigt.

Aufgabe 3 (3+4=7 Punkte)

a) 1. Die beiden Spaltenvektoren von A $(1,-1,3)^T$ und $(0,1,-1)^T$ sind linear unabhängig, denn aus $a(1,-1,3)^T + b(0,1,-1)^T = 0$ folgt $(a, -a+b, 3a-b)^T = 0$, und damit $a = 0$ und $b = 0$. Daraus folgt, dass $rang(A) \geq 2$.

2. Die drei Spaltenvektoren von A sind linear abhängig, denn es ist z.B. $(1,-1,3)^T + (0,1,-1)^T - (1,0,2)^T = 0$. Daraus folgt, dass $rang(A) \leq 2$.

Also ist $rang(A) = 2$ und damit $\dim Ker(f) = 3 - rang(A) = 1$.

b) 1. Eine Basis von $Im(f)$ kann z.B. aus zwei linear unabhängigen Spaltenvektoren von A gebildet werden, also z.B. $((1,-1,3)^T, (0,1,-1)^T)$.

2. Zur Bestimmung einer Basis von $Ker(f)$ muss die folgende Gleichung für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelöst werden:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ 3x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Wählt man z.B. $x = 1$, so ergibt sich $y = 1, z = -1$, d.h. es gilt $(1,1,-1)^T \in Ker(f)$. Da $Ker(f)$ eindimensional ist, muss schon gelten, dass $((1,1,-1)^T)$ eine Basis für $Ker(f)$ ist.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

a) Wir machen den Ansatz $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Für $t = 0$ ergibt sich dann wegen $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$

$$0 = av_1(0) + bv_2(0) + cv_3(0) = a\sin^2(0) + b\cos^2(0) + c\sin(0)\cos(0) = b,$$

und für $t = \frac{\pi}{4}$ wegen $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$0 = av_1(\pi/4) + bv_2(\pi/4) + cv_3(\pi/4) = a\sin^2(\pi/2) + c\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) = a,$$

und damit für $t = 1$ wegen $\sin(2) \neq 0$ und $\cos(2) \neq 0$

$$0 = av_1(1) + bv_2(1) + cv_3(1) = c\sin(2)\cos(2) \Leftrightarrow c = 0.$$

Damit sind die drei Funktionen linear unabhängig.

b) 1. D ist linear: Seien $f, g \in V, \lambda, t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(D_{\lambda f+g})(t) = (\lambda f + g)'(t) = \lambda f'(t) + g'(t) = (\lambda f' + g')(t) = (\lambda D_f + D_g)(t).$$

2. D bildet nach V ab: Es genügt, dies für die Basiselemente zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned}
(D_{v_1})(t) &= (\sin^2(2t))' = 2\sin(2t)\cos(2t)\cdot 2 = 4v_3(t) \in V \\
(D_{v_2})(t) &= (\cos^2(2t))' = 2\cos(2t)\cdot(-\sin(2t))\cdot 2 = -4v_3(t) \in V \\
(D_{v_3})(t) &= (\sin(2t)\cos(2t))' = 2\cos^2(2t) - 2\sin^2(2t) \\
&= 2v_2(t) - 2v_1(t) \in V.
\end{aligned}$$

Die Matrixdarstellung ergibt sich aus den Koeffizienten vor v_1, v_2, v_3 in den vorangegangenen Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$