Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 27. Mai 2011, 10:10 Uhr

Aufgabe 1 (3+4+4=11 Punkte)

Sei W ein Vektorraum, I eine beliebige Indexmenge. $U_i, i \in I$, sowie U und V seien Untervektorräume von W. Es sei $U + V := span(U \cup V)$.

a) Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Untervektorraum von W ist.

b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass $U \cup V$ kein Untervektorraum von W sein muss.

c) Zeigen Sie, dass $U + V = \{u + v | u \in U, v \in V\}$.

Aufgabe 2 (4+4+6=14 Punkte)

Sei $f : U \to V$ ein Vektorraumhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : V \to U$ linear.

b) $Ker(f)$ ist ein Unterraum von U und $Im(f)$ ein Unterraum von V.

c) Sind U und V endlichdimensional, so gilt

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim U.$$

Hinweis: Finden Sie geeignete Basen der Vektorräume, um die Dimensionen zu ermitteln. Ergänzen Sie eine Basis von $Ker(f)$ zu einer Basis von U.

Aufgabe 3 (4+5=9 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Basen des $\mathbb{R}^3$.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Wie lautet die Darstellung des Vektors $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basen A und B?

b) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ besitzt bezüglich der Basis B die Darstellung $x = (-4, 2, -3)_B$. Wie lautet seine Darstellung bezüglich der Basis C?