Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 6

Aufgabe 1 (3+4+4=11 Punkte)

a) Da U_i ein Untervektorraum ist für alle $i \in I$, gilt $0 \in U_i$, und damit $0 \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Seien nun $u, v \in \bigcap_{i \in I} U_i$, $\lambda \in K$. Zu zeigen ist, dass $u + v, \lambda u \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Es gilt

$$u, v \in \bigcap_{i \in I} U_i \Rightarrow u, v \in U_i \ \forall i \in I,$$

und damit, da U_i ein Untervektorraum ist für alle $i \in I$,

$$u + v \in U_i \ \forall i \in I \Rightarrow u + v \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

und

$$\lambda u \in U_i \ \forall i \in I \Rightarrow \lambda u \in \bigcap_{i \in I} U_i.$$

Also ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Untervektorraum von W.

b) Es seien $W := \mathbb{R}^2$, $U := span((1,0)) = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$,$V := span((0,1)) = \{(0,y) | y \in \mathbb{R}\}$. U und V sind Untervektorräume von W (nachrechnen!), aber $U \cup V$ nicht. Angenommen, $U \cup V$ wäre ein Untervektorraum von W. Es gilt $(1,0), (0,1) \in U \cup V$, und damit $(1,1) = (1,0) + (0,1) \in U \cup V$. Dies ist aber ein Widerspruch, da $(1,1) \notin U$ und auch $(1,1) \notin V$, und damit $(1,1) \notin U \cup V$.

c) Wir zeigen beide Inklusionen.

1. "$\subseteq$": Sei $w \in U+V$, d.h. w hat die Darstellung $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ mit $w_i \in U \cup V$. Wir sortieren die w_i danach, ob sie in U liegen oder nicht. Da $w_i \in U \cup V$, folgt aus $w_i \notin U$, dass $w_i \in V$. w hat also eine Darstellung

$$w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j$$

mit $u_i \in U$ und $v_i \in V$. Da U, V Untervektorräume von W sind, gilt $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in U$ und $\sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j \in V$, und damit $w \in \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$.

2. "$\supseteq$": Sei $w \in \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$, d.h. $w = u + v$ mit $u \in U$ und $v \in V$. Da $u, v \in U \cup V$, folgt $w = u + v \in span(U \cup V) = U + V$.

Aufgabe 2 (4+4+6=14 Punkte)

a) Für $x, y \in U, \lambda \in K$ ist $f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = \lambda x + y$, woraus folgt, dass $f^{-1}(\lambda x + y) = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. Damit ist f^{-1} linear.

b) 1. Es ist $f(0) = 0$, und damit $0 \in Ker(f)$. Seien $\lambda \in K, x, y \in Ker(f)$, d.h. $f(x) = 0, f(y) = 0$. Dann ist $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$ und damit $x + y \in Ker(f)$. Außerdem ist $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ und damit $\lambda x \in Ker(f)$.

2. Es ist $f(0) = 0$, und damit $0 \in Im(f)$. Seien $\lambda \in K, f(x), f(y) \in Im(f)$. Dann ist $f(x) + f(y) = f(x + y) \in Im(f)$ und $\lambda f(x) = f(\lambda x) \in Im(f)$.

c) Da U endlichdimensional ist, ist es $Ker(f)$ als Unterraum auch. Sei $B_1 := \{k_1, \ldots, k_l\}$ eine Basis von $Ker(f)$. Die Vektoren k_i sind linear unabhängig, können also zu einer Basis $B_2 := \{k_1, \ldots, k_l, u_1, \ldots, u_m\}$ von U ergänzt werden. Wir zeigen nun, dass die Menge $B_3 = \{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$ eine Basis von $Im(f)$ ist.

1. $span(B_3) = Im(f)$: Die Inklusion "$\subseteq$" ist klar, für die andere Inklusion sei $f(x) \in Im(f)$ mit $x \in U$. x hat also eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j.$$

Daher ist

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i k_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \underbrace{f(k_i)}_{=0} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(u_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(u_j),$$

$f(x)$ besitzt also eine Darsellung als Linearkombination der Vektoren aus B_3, also $Im(f) \subseteq span(B_3)$.

2. Lineare Unabhängigkeit: Sei $\sum_{j=1}^{m} \mu_j f(u_j) = 0$ gegeben. Es ist also

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f(u_j) = f\left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j\right),$$

d.h. $k := \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j \in Ker(f)$. k hat also eine Darstellung $k = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i k_i$ der Basisvektoren von $Ker(f)$. Es gilt also

$$0 = k - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i k_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i k_i.$$

Da die Menge B_2 eine Basis von U und damit linear unabhängig ist, muss gelten $\lambda_i = 0$ für alle i und auch $\mu_j = 0$ für alle j, was zu zeigen war.

Also ist B_3 eine Basis für $Im(f)$, und damit gilt

$$\dim Ker(f) + \dim Im(f) = |B_1| + |B_3| = l + m = |B_2| = \dim U.$$

Aufgabe 3 (4+5=9 Punkte)

a) Offensichtlich ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 2)_A.$$

Zur Darstellung in der Basis B machen wir den Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2a + b &= 1 \\ 4a + b - c &= 1 \\ -a + b + c &= 2 \end{aligned}$$

Das System hat die Lösung $a = -1, b = 3, c = -2$, d.h. x besitzt die Darstellung $(-1, 3, -2)_B$.

b) Wir berechnen zuerst die Darstellung von v in der Standardbasis:

$$v = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix},$$

anschließend machen wir wieder den Ansatz

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das sich daraus ergebende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a - b + c &= -6 \\ -a + 2b - 3c &= -11 \\ -b + 2c &= 3 \end{aligned}$$

hat die Lösung $a = -7, b = -27, c = -12$, d.h. $v = (-7, -27, -12)_C$.