Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 20. Mai 2011, 10:10 Uhr

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ gilt:

(a) $0 \cdot v = \vec{0}$

(b) $(-1) \cdot v = -v$.

Aufgabe 2 (10+8=18 Punkte)

Sei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass V zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}, f, g \in V \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \qquad \text{für } \lambda, x \in \mathbb{R}, f \in V \end{aligned}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Welche der folgenden Teilmengen von V sind auch Unterräume?

(i) $U_1 = \{f \in V | f(0) = 0\}$

(ii) $U_2 = \{f \in V | f(1) = 1\}$

(iii) $U_3 = \{f \in V | f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

(iv) $U_4 = \{f \in V | f(x) = |f(x)|\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3 (4+8=12 Punkte)

Sei $V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $U := \{f \in V | \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) = 0\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\delta_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, j \mapsto \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\delta_k | k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von U ist.