Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 5

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

(a) Es ist $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Subtraktion von $0 \cdot v$ liefert $\vec{0} = 0 \cdot v$.

(b) Es ist $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = \vec{0}$, woraus folgt, dass $(-1) \cdot v$ das additiv inverse Element zu v ist, also $-v = (-1) \cdot v$.

Aufgabe 2 (10+8=18 Punkte)

(a) Seien $f, g, h \in V$, $\lambda, \mu, x \in \mathbb{R}$

1. Abgeschlossenheit: Es gilt $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ und damit $f + g \in V$.
2. Die Assoziativität der Addition in V folgt direkt aus der Assoziativität der Addition in $\mathbb{R}$, denn $(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) = (f + g)(x) + h(x) = ((f + g) + h)(x)$ und damit $f + (g + h) = (f + g) + h$.
3. Das neutrale Element der Addition ist die Nullfunktion $x \mapsto 0$, denn es ist $f(x) + 0 = 0 + f(x) = f(x)$.
4. Das additiv inverse Element von f ist die Funktion $x \mapsto -f(x)$, denn es ist $f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0$.
5. Die Kommutativität von V folgt direkt aus der Kommutativität von $\mathbb{R}$, denn $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$ und damit $f + g = g + f$.
6. Es ist $(\lambda(\mu f))(x) = \lambda((\mu f)(x)) = \lambda(\mu f(x)) = (\lambda\mu) f(x) = ((\lambda\mu) f)(x)$ und damit $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$.
7. Es ist $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$ und damit $1 \cdot f = f$.
8. Es ist $(\lambda(f + g))(x) = \lambda((f + g)(x)) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)$ und damit $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$.
9. Es ist $((\lambda + \mu) f)(x) = (\lambda + \mu) f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x)$, und damit $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$.

(b) (i) $U_1 = \{f \in V | f(0) = 0\}$ ist ein Unterraum, denn die Nullfunktion liegt in V, für $f, g \in U_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0$ und damit $f + g \in U_1$, und außerdem $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$ und damit $\lambda f \in U_1$.

(ii) $U_2 = \{f \in V | f(1) = 1\}$ ist kein Unterraum, denn für ein beliebiges $f \in U_2$ und $\lambda := 2$ gilt $(\lambda f)(1) = 2f(1) = 2 \cdot 1 = 2$ und damit $\lambda f \notin U_2$.

(iii) $U_3 = \{f \in V | f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum, denn für die Nullfunktion gilt $f(x) = 0 = f(-x)$. Für $f, g \in U_3$ und $x, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$ und damit $f + g \in U_3$, und außerdem $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x)$ und damit $\lambda f \in U_3$.

(iv) $U_4 = \{f \in V | f(x) = |f(x)|\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ ist kein Unterraum. Wähle als Gegenbeispiel $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\lambda := -1$. Es ist $f(x) = 1 = |1| = |f(x)|$ und damit $f \in U_4$, aber $(\lambda f)(0) = -f(0) = -1 \neq 1 = |-1| = |(\lambda f)(0)|$ und damit $\lambda f \notin U_4$.

Aufgabe 3 (4+8=12 Punkte)

(a) Die Nullfunktion liegt offensichtlich in U. Seien $f, g \in U$, d.h. es gibt $n_f, n_g \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) = 0\ \forall n \geq n_f$ und $g(n) = 0\ \forall n \geq n_g$. Definiere nun $n_0 := \max\{n_f, n_g\}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass $(f+g)(n) = f(n) + g(n) = 0$, also $f + g \in U$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, definiere $n_0 := n_f$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, dass $(\lambda f)(n) = \lambda f(n) = 0$, also $\lambda f \in U$. Also ist U ein Untervektorraum von V.

(b) zu zeigen ist:

1. $span(\{\delta_k | k \in \mathbb{N}\}) = U$. Sei $f \in U$, d.h. es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) = 0\ \forall n \geq n_0$. Wir zeigen nun, dass $\sum_{k=1}^{n_0} f(k)\delta_k = f$. Es ist nämlich für $n \leq n_0$, da $\delta_k(n) = 0$ für alle $k \neq n$,
$$\left(\sum_{k=1}^{n_0} f(k)\delta_k\right)(n) = \sum_{k=1}^{n_0} f(k)(\delta_k(n)) = f(n)(\delta_n(n)) = f(n).$$
Für $n > n_0$ gilt
$$\left(\sum_{k=1}^{n_0} f(k)\delta_k\right)(n) = \sum_{k=1}^{n_0} f(k)(\delta_k(n)) = 0 = f(n),$$
d.h. $\sum_{k=1}^{n_0} f(k)\delta_k = f$, f lässt sich also als Linearkombination der δ_k darstellen.

2. $B := \{\delta_k | k \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig. Zu zeigen ist, dass jede endliche Teilmenge von B linear unabhängig ist. Seien also $\{\delta_{k_l} | 1 \leq l \leq n\}$ eine endliche Teilmenge von B und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ so, dass $\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \delta_{k_l} = 0$. Für $m \in \{1, \ldots, n\}$ gilt dann

$$0 = \left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \delta_{k_l} \right) (k_m) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \delta_{k_l}(k_m) = \lambda_m \delta_{k_m}(k_m) = \lambda_m.$$

Die λ_m sind also alle gleich 0, woraus die lineare Unabhängigkeit von B folgt.

B ist also eine Basis von U.