Mathematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes — Matthias Hein
Sommersemester 2011 — Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 13. Mai 2011, 10:10 Uhr

Existiert für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $b = a \cdot m$, so sagt man, "a teilt b" und schreibt "$a|b$".

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

Es sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in \mathbb{R}[x]$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$, so ist $f(\bar{z}) = 0$.

(b) Ist $f \in \mathbb{Z}[x]$ und sind $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $ggT(p, q) = 1$ und $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, so gilt $p|a_0$ und $q|a_n$.

Aufgabe 2 (4+3+3=10 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Gegeben seien die Polynome $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$
mit $f(x) := \prod\limits_{a \in \mathbb{Z}_p} (x - a)$ und $g(x) := x^p - x$.

(a) Zeigen Sie, dass $deg(f - g) < p$.

(b) Berechnen Sie $(f - g)(a)$ für alle $a \in \mathbb{Z}_p$.
Hinweis: Aufgabe 3 von Blatt 3.

(c) Folgern Sie, dass $f = g$.

Aufgabe 3 (4+10=14 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1, in dem jedes Element a idempotent ist, d.h. die Gleichung $a \cdot a = a$ erfüllt. Ein solcher Ring heißt *boolescher Ring*. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a \in R$ gilt $a + a = 0$.

(b) R versehen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} a \vee b &:= a + b + ab \\ a \wedge b &:= ab \\ \neg a &:= a + 1 \end{aligned}$$

ist eine boolesche Algebra.