Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger

Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 4

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

(a) Die Konjugation hat folgende Eigenschaften: $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt außerdem $\overline{x} = x$, und damit $\overline{a_k} = a_k$ für $0 \leq k \leq n$, da $f \in \mathbb{R}[x]$. Daher gilt:

$$f(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \cdot z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0.$$

(b) Wir haben

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{-k} = 0.$$

Multiplikation mit $q^n (\neq 0)$ liefert

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$-a_0 q^n = \sum_{k=1}^{n} a_k p^k q^{n-k} = p \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k p^{k-1} q^{n-k}}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Daraus folgt, dass $p | a_0 q^n$, und da $ggT(p, q) = 1$, folgt $p | a_0$.
Analog folgt aus (1) ebenfalls, dass

$$-a_n p^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k} = q \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k-1}}_{\in \mathbb{Z}}$$

und damit $q | a_n p^n$ und wieder, da $ggT(p, q) = 1$, $q | a_n$.

Aufgabe 2 (4+3+3=10 Punkte)

(a) f ist ein Produkt aus p Linearfaktoren der Form $x - a$, hat daher den Leitkoeffizient 1, d.h., es ist von der Form $f(x) = x^p + h(x)$ mit $h \in \mathbb{Z}_p[x]$ und $deg(h) < p$. Es ist daher $(f - g)(x) = x^p + h(x) - (x^p - x) = h(x) + x$, woraus folgt, dass $deg((f - g)(x)) = deg(h(x) + x) \leq max\{\underbrace{deg(h)}_{<p}, \underbrace{deg(x)}_{=1<p}\} < p$.

(b) Sei $a \in \mathbb{Z}_p$ beliebig. Nach Aufgabe 3 von Blatt 3 gilt, dass $g(a) = 0$. Außerdem ist $f(x) = (x - a) \cdot \prod_{b \in \mathbb{Z}_p, b \neq a} (x - b)$, und damit $f(a) = 0 \cdot \prod_{b \in \mathbb{Z}_p, b \neq a} (a - b) = 0$, woraus folgt, dass $(f - g)(a) = f(a) - g(a) = 0$.

(c) Nach (a) gilt, dass $deg(f - g) < p$, nach (b) hat $f - g$ aber p Nullstellen. Da ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom mit p Nullstellen mindestens den Grad p haben muss, kann $f - g$ nur das Nullpolynom sein. Es gilt also $f - g = 0 \Leftrightarrow f = g$.

Aufgabe 3 (4+10=14 Punkte)

(a) Es ist

$$a + a = (a + a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a.$$

Daraus folgt, dass $a + a = 0$.

(b) 1. Kommutativität:
$a \vee b = a + b + ab = b + a + ba = b \vee a$
$a \wedge b = ab = ba = b \wedge a$

2. Assoziativität:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee c &= (a + b + ab) \vee c = a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc = a \vee (b + c + bc) \\ &= a \vee (b \vee c)\end{aligned}$$

$$(a \wedge b) \wedge c = (ab)c = a(bc) = a \wedge (b \wedge c)$$

3. Distributivgesetze:
$a \vee (b \wedge c) = a \vee bc = a + bc + abc$,

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= (a + b + ab) \wedge (a + c + ac) \\ &= a^2 + ac + a^2c + ab + bc + abc + a^2b + abc + a^2bc \\ &= a + ac + ac + ab + bc + abc + ab + abc + abc \\ &= a + \underbrace{(ac + ac)}_{=0} + \underbrace{(ab + ab)}_{=0} + bc + \underbrace{(abc + abc)}_{=0} + abc \\ &= a + bc + abc,\end{aligned}$$

d.h. $a \vee (b \wedge c) = a + bc + abc = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,
und
$a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) = ab + ac + abc$,
$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = ab \vee ac = ab + ac + a^2bc = ab + ac + abc$,
d.h. $a \wedge (b \vee c) = ab + ac + abc = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

4. Neutrale Elemente: Die neutralen Elemente sind dieselben wie im Ring, denn
   $0 \vee a = 0 + a + a \cdot 0 = a$ und
   $1 \wedge a = 1 \cdot a = a$

5. Komplementäre Elemente:
   $a \vee (a+1) = a+a+1+a(a+1) = (a+a)+1+a^2+a = (a+a)+1+(a+a) = 1$
   $a \wedge (a + 1) = a^2 + a = a + a = 0$.