Mathematik für Informatiker II
Universität des Saarlandes
Sommersemester 2011

Matthias Hein
Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 6. Mai 2011, **vor** der Vorlesung

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

(a) Es sei G eine Gruppe und U ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass die Nebenklassenmenge G/U zusammen mit der Verknüpfung

$$(gU)(hU) := ghU$$

eine Gruppe ist. Die Wohldefiniertheit der Verknüpfung wurde in der Vorlesung bereits gezeigt.

(b) Zeigen Sie am Beispiel von $G = S_3$ und $U = \langle(12)\rangle$, dass die Verknüpfung aus (a) nicht notwendig wohldefiniert ist, wenn U kein Normalteiler ist, d.h. finden Sie $g_1, g_2, h_1, h_2 \in S_3$ mit $g_1U = g_2U$ und $h_1U = h_2U$, aber $g_1h_1U \neq g_2h_2U$.

Aufgabe 2 (2+4+2+4+6=18 Punkte)

Es seien G und H zwei Gruppen und $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Ziel dieser Aufgabe ist es, den Homomorphiesatz für Gruppen

$$G/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$$

zu beweisen. Zeigen Sie dazu:

(a) Ker f ist eine Untergruppe von G.

(b) Ker f ist ein Normalteiler von G.

(c) Im f ist eine Untergruppe von H.

(d) Die Abbildung $\varphi : G/\text{Ker } f \to \text{Im } f;\ g\,\text{Ker } f \mapsto f(g)$ ist wohldefiniert.

(e) φ ist ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 3 (3+2+3=8 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{Z}_p$ der Körper mit p Elementen.

(a) Sei G eine Gruppe mit $|G| = n$. Zeigen Sie, dass für alle $g \in G$ gilt, dass $g^n = e$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 2.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{Z}_p$ gilt, dass $a^p = a$.

(c) Geben Sie ein Polynom $q \in \mathbb{Z}_p[x]$ an mit $q \neq 0$, aber $q(a) = 0 \; \forall a \in \mathbb{Z}_p$.