Mathematematik für Informatiker II

Universität des Saarlandes | Matthias Hein
Sommersemester 2011 | Christoph Eisinger

Hausübungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 29. April 2011, **vor** der Vorlesung

Sei G eine Gruppe. Für $E \subseteq G$ heißt

$$\langle E \rangle := \bigcap \{U \mid E \subseteq U,\ U \text{ ist Untergruppe von } G\}$$

das Erzeugnis von E in G oder *die von E erzeugte Untergruppe von G*. Sie ist die kleinste Untergruppe von G, die E enthält.

Gilt $E = \{g\}$ für ein $g \in G$, so schreibt man statt $\langle \{g\} \rangle$ auch $\langle g \rangle$. Solch eine von einem einzelnen Element erzeugte Gruppe nennt man *zyklisch*.

Aufgabe 1 (4+2+2 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$, d.h. aller Bijektionen $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Wir versehen S_n mit der Hintereinanderausführung (Komposition) "$\circ$" von Abbildungen als Verknüpfung, d.h. für $\sigma, \tau \in S_n$ sei $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$ defniert durch

$$(\sigma \circ \tau)(k) := \sigma(\tau(k)) \text{ für alle } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(S_n, \circ)$ eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung von S_n.

(c) Gegeben seien $\sigma = (263)(47)$ und $\tau = (14)(265)$. Berechnen Sie $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$.

Aufgabe 2 (3+4+2+4 Punkte)

Es sei $U := \langle (1342) \rangle \subseteq S_4$.

(a) Geben Sie U in aufzählender Schreibweise an.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von U.

(c) Wieviele verschieden Linksnebenklassen σU gibt es mit $\sigma \in S_4$?

(d) Bestimmen Sie $(13)U$ und $U(13)$.

Aufgabe 3 (4+4+3 Punkte)

Gegeben sei eine endliche Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element e sowie ein Element $g \in G$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $g^n = e$. Hierbei bezeichnet g^k die k-fache Verknüpfung von g mit sich selbst.

(b) Sei n_0 das kleinste n wie in (a). Zeigen Sie, dass dann

$$\langle g \rangle = \{g^k \mid k = 0, \ldots, n_0 - 1\},$$

wobei $g^0 := e$.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle g \rangle$ eine Untergruppe von G ist.