Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 2

Aufgabe 1 (4+2+2 Punkte)

(a) Abgeschlossenheit und Assoziativität ergeben sich aus den Eigenschaften der Komposition. Das neutrale Element ist die Identität $id : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$; $id(k) = k$, für die offensichtlich gilt, dass $id \circ \sigma = \sigma = \sigma \circ id$ für alle $\sigma \in S_n$. Für ein $\sigma \in S_n$ ist das inverse Element die Umkehrabbildung σ^{-1}. Diese existiert, da σ bijektiv ist, sie ist selbst wieder bijektiv und damit $\in S_n$, und sie erfüllt per Definition die Gleichung $\sigma \circ \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \circ \sigma$.

(b) Es ist $|S_n| = n!$, denn für die Platzierung der 1 gibt es n Möglichkeiten, für die Platzierung der 2 gibt es $n-1$ Möglichkeiten, usw., bis es für die Platzierung von n nur noch eine Möglichkeit gibt. Insgesamt gibt es also $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten, die Zahlen $1, \ldots, n$ anzuordnen.

(c) $\sigma\tau = (263)(47)(14)(265) = (174)(23)(56)$,
$\tau\sigma = (14)(265)(263)(47) = (147)(25)(36)$.

Aufgabe 2 (3+4+2+4 Punkte)

(a) Es ist $(1342)^2 = (14)(23)$, $(1342)^3 = (1243)$, $(1342)^4 = id$. Nach Aufgabe 3 gilt dann $U = \{id, (1342), (1342)^2, (1342)^3\} = \{id, (1342), (14)(23), (1243)\}$.

(b) U besitzt neben den trivialen Untergruppen $\{id\}$ und U nur die Untergruppe $U_1 := \langle (14)(23) \rangle = \{id, (14)(23)\}$, denn da die Ordnung jeder Untergruppe von U ein Teiler von $|U| = 4$ sein muss und es außer den trivialen Untergruppen keine anderen Untergruppen von U der Ordnung 1 und 4 geben kann, muss eine nichttriviale Untergruppe die Ordnung 2 haben. Sie muss also von der Form $\{id, \sigma\}$ sein mit $\sigma \in U$. Da $(1342)^2 = (14)(23) = (1243)^2$, sind die Mengen $\{e, (1342)\}$ und $\{e, (1243)\}$ nicht abgeschlossen und damit keine Gruppen. Die einzige Untergruppe ist daher U_1 (mit $((14)(23))^2 = id$).

(c) Nach dem Satz von Lagrange gilt $S_4 : U = |S_4|/|U| = 4!/4 = 24/4 = 6$.

(d) $(13)U = \{(13)id, (13)(1342), (13)(14)(23), (13)(1243)\}$
$= \{(13), (234), (1432), (124)\}$.
Analog berechnet man $U(13) = \{(13), (142), (1234), (243)\}$.

Aufgabe 3 (4+4+3 Punkte)

(a) Es existieren $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ mit $g^k = g^l$, denn wäre $g^k \neq g^l$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$, so wäre die Menge $U := \{g^k | k \in \mathbb{N}\}$ unendlich groß. Da aber $U \subseteq G$ und G endlich ist, kann das nicht sein. Es müssen also $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ existieren mit $g^k = g^l$. Dann ist aber $g^{k-l} = g^k(g^l)^{-1} = g^k(g^k)^{-1} = e$.

(b) Wir zeigen beide Inklusionen:

1. $\langle g \rangle \subseteq V := \{g^k \mid k = 0, \dots, n_0 - 1\}$: Wir zeigen zunächst, dass V eine Untergruppe von G ist. V ist nicht leer, da $e = g^0 \in V$. Seien nun $g^k, g^l \in V$. Schreibe $k - l$ in der Form $an_0 + b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$. Dann ist $g^k(g^l)^{-1} = g^{k-l} = g^{an_0+b} = (g^{n_0})^a g^b = eg^b = g^b \in V$. V ist also eine Untergruppe von G, die zudem g enthält, und da $\langle g \rangle$ per Definition der Durchschnitt über alle solchen Gruppen ist, muss gelten $\langle g \rangle \subseteq V$.
2. $V \subseteq \langle g \rangle$: Sei U eine Untergruppe von G, die g enthält. Dann muss U wegen ihrer Abgeschlossenheit auch alle g^k, $k \in \mathbb{N}$ enthalten, also auch $V \subseteq U$. Da $\langle g \rangle$ der Durchschnitt über alle solchen Gruppen U ist, muss auch gelten $V \subseteq \langle g \rangle$.

(c) In (b) wurde gezeigt, dass V eine Untergruppe von G ist und dass $\langle g \rangle = V$. Damit ist die Aussage gezeigt.