Mathematik für Informatiker II

Christoph Eisinger
Sommersemester 2011

Musterlösungen zum Hausübungsblatt 1

Aufgabe 1 (6+3 Punkte)

(a) Induktionsanfang ($n = 0$): $2^{2\cdot 0} - 1 = 0$ ist durch 3 teilbar.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Es sei $2^{2n} - 1 = 3k$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Induktionsschritt ($n \to n+1$): $2^{2(n+1)} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 4 \cdot (2^{2n} - 1) + 4 - 1 \overset{\text{I.V.}}{=} 4 \cdot 3k + 3 = 3 \cdot (4k + 1)$ ist durch 3 teilbar.

(b) Es ist $n! = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{k}_{\leq n} \leq \prod_{k=1}^{n} n = n^n$.

Aufgabe 2 (8+8 Punkte)

(a) 1. Abgeschlossenheit: Seien $x, y \in G$.

1.Fall, $x + y \leq 1$: Dann ist $x \circ y = x + y > 0$ und $x \circ y = x + y \leq 1$ und damit $x \circ y \in G$.

2.Fall, $x + y > 1$: Dann ist $x \circ y = x + y - 1 > 1 - 1 = 0$ und $x \circ y = x + y - 1 \leq 2 - 1 = 1$ und damit ebenfalls $x \circ y \in G$.

Assoziativität: Seien $x, y, z \in G$. Es ist

$$
\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z &= \begin{cases} (x \circ y) + z, & (x \circ y) + z \leq 1 \\ (x \circ y) + z - 1, & (x \circ y) + z > 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} x + y + z, & x + y + z \leq 1, x + y \leq 1 \\ (x + y - 1) + z, & (x + y - 1) + z \leq 1, x + y > 1 \\ (x + y) + z - 1, & (x + y) + z > 1, x + y \leq 1 \\ (x + y - 1) + z - 1, & (x + y - 1) + z > 1, x + y > 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} x + y + z, & x + y + z \leq 1 \\ x + y + z - 1, & x + y + z \leq 2, x + y > 1 \\ x + y + z - 1, & x + y + z > 1, x + y \leq 1 \\ x + y + z - 2, & x + y + z > 2, \end{cases} \\
&= \begin{cases} x + y + z, & x + y + z \leq 1 \\ x + y + z - 1, & 1 < x + y + z \leq 2 \\ x + y + z - 2, & x + y + z > 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Eine analoge Rechnung führt zu dem Ergebnis

$$
x \circ (y \circ z) = \begin{cases} x + y + z, & x + y + z \leq 1 \\ x + y + z - 1, & 1 < x + y + z \leq 2 \\ x + y + z - 2, & x + y + z > 2, \end{cases}
$$

und damit $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

2. Neutrales Element: Das neutrale Element von G ist die 1, denn für $x \in G$ ist $x + 1 > 1$ und damit $1 \circ x = x \circ 1 = x + 1 - 1 = x$.
3. Inverse Elemente: Für $x \in G \setminus \{1\}$ ist das neutrale Element $x^{-1} = 1 - x \in G$, da $x + (1 - x) = 1 \leq 1$ und damit $x \circ (1 - x) = (1 - x) \circ x = x + (1 - x) = 1$. Die 1 als neutrales Element ist trivialerweise zu sich selbst invers.

(b) 1. Abgeschlossenheit: Für $a, b \in G$ mit $a := v + w\sqrt{2}$ und $b := x + y\sqrt{2}$ ist

$$
a \circ b = ab = (v + w\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = vx + 2wy + (vy + wx)\sqrt{2} \in G.
$$

2. Die Assoziativität von $\circ$ ergibt sich aus der Assoziativität der Multiplikation.
3. Das neutrale Element ist das neutrale Element der Multiplikation, die $1 (= 1 + 0\sqrt{2} \in G)$.

4. Inverse Elemente: Für $x + y\sqrt{2} \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}\left(x + y\sqrt{2}\right)^{-1} &= \frac{1}{x + y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})} = \frac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 - 2y^2} - \frac{y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2} \in G.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

(a) 1. $\mathbb{Z}$ ist offensichtlich nicht leer, und für $m, n \in \mathbb{Z}$ ist $m - n \in \mathbb{Z}$.

2. $\mathbb{Q}$ ist nicht leer, und für $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p = \frac{a}{b}$ und $q = \frac{c}{d}$ ist $p - q = \frac{ad-bc}{bd} \in \mathbb{Q}$.

(b) 1. Die Menge $\{e\}$ ist nicht leer, sie enthält nur das Element e, und für dieses gilt $e \bullet e^{-1} = e \bullet e = e \in \{e\}$.

2. G ist nicht leer, da $e \in G$. Für $a, b \in G$ gilt wegen der Abgeschlossenheit von $\bullet$, dass $a \bullet b^{-1} \in G$.